

# CONVECTION DE LA CHALEUR EN RÉGIME LAMINAIRE DANS LE CAS D'UN GRADIENT DE PRESSION ET D'UNE TEMPÉRATURE DE PAROI QUELCONQUES, LE FLUIDE ÉTANT À PROPRIÉTÉS PHYSIQUES CONSTANTES

B. LE FUR

Sorbonne, Paris, France

(Received 12 October 1959)

**Résumé**—L'intégration par approximations successives des équations de la couche limite laminaire permet de calculer dans le cas d'un gradient de pression quelconque les coefficients de frottement et de convection, la température effective et le facteur thermique pariétal de frottement.

**Abstract**—Integration by successive approximations of the laminar boundary layer equations enables one to calculate, for any pressure gradient, the friction and convection coefficients, the effective temperature and the recovery factor.

**Zusammenfassung**—Die Gleichungen der laminaren Grenzschicht werden durch schrittweise Verbesserung integriert. Man kann dadurch für beliebige Druckgradienten die Koeffizienten der Reibung und Wärmeübertragung, die effektive Temperatur und den Rückgewinnfaktor berechnen.

**Abstract**—Приведены решения уравнений переноса для ламинарного пограничного слоя методом последовательных приближений. Вычислены коэффициенты трения, теплообмена и эффективная температура для любого градиента давления.

## NOTATIONS UTILISÉES

$x$	= abscisse curviligne le long de la paroi,	$Pr$	= nombre de Prandtl;
$y$	= ordonnée prise perpendiculairement à la paroi;	$r$	= facteur thermique pariétal de frottement;
$u$	= composante longitudinale de la vitesse;	$r_c$	= facteur thermique pariétal de convection local;
$v$	= composante transversale de la vitesse;	$\bar{r}_c$	= facteur thermique pariétal de convection moyen;
$\theta$	= température absolue;	$\alpha$	= coefficient de convection local;
$\rho$	= masse volumique;	$\alpha_m$	= coefficient de convection moyen;
$\psi$	= fonction de courant;	$R_x$	= nombre de Reynolds rapporté à $x$ ;
$\mu$	= viscosité;	$C_f$	= coefficient de frottement local;
$\nu$	= viscosité cinématique;	$N_x$	= nombre de Nusselt local rapporté à $x$ ;
$\tau_p$	= tension de frottement à la paroi;	$N_{xm}$	= nombre de Nusselt moyen rapporté à $x$ .
$\lambda$	= coefficient de conductibilité thermique;		
$C_p$	= chaleur spécifique à pression constante;		
$\Phi_p$	= densité de flux de chaleur à la paroi;		
$\Phi_m$	= densité moyenne de flux de chaleur;		
$\theta_f$	= température de frottement;		
$\theta_{fm}$	= température moyenne de frottement;		
$\theta_{\text{eff}}$	= température effective locale;		
$\theta_{\text{eff}}$	= température effective moyenne;		

## Indices inférieurs

$e$	= écoulement extérieur à la couche limite;
$p$	= conditions à la paroi;
$t$	= conditions au point d'arrêt;
$0$	= fonction de départ;
$1$	= première approximation.

## INTRODUCTION

Nous nous placerons dans le cas de la couche limite laminaire sur un obstacle bidimensionnel. Nous supposons en outre que la vitesse extérieure  $u_e$  et la différence entre la température de la paroi  $\theta_p$  et la température extérieure  $\theta_e$  sont faibles, afin que la viscosité  $\mu$ , la masse volumique  $\rho$ , la conductibilité thermique  $\lambda$  et la chaleur spécifique à pression constante  $C_p$  du fluide puissent être considérées comme constantes.

Nous introduirons ici un processus d'intégration par itération des équations de l'impulsion et de l'énergie mises sous la forme de von Mises [1]. Nous considérerons le cas général dans lequel les répartitions de vitesses  $u_e(x)$  et de températures  $\theta_p(x)$  sont quelconques.

Dans cet article nous n'étudierons que la première approximation.

## 1. TRANSFORMATION DE VON MISES

## 1.1. Equations de Prandtl

Les équations qui régissent la vitesse et la température ont été données par Prandtl sous la forme suivante:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

$$u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{u}{\rho C_p} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\lambda}{\rho C_p} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\mu}{\rho C_p} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (4)$$

D'après l'équation (3), nous aurons:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dp_e}{dx}$$

La relation de Bernoulli nous donne:

$$\frac{dp_e}{dx} = -\rho u_e \frac{du_e}{dx}$$

D'autre part, la température totale  $\theta_t = \theta_e + u_e^2/2C_p$  étant constante dans l'écoulement extérieur à la couche limite:

$$C_p \frac{d\theta_e}{dx} = -u_e \frac{du_e}{dx}$$

Les équations (2) et (4) deviennent alors:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = u_e \frac{du_e}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (5)$$

$$u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = u \frac{d\theta_e}{dx} + \frac{\lambda}{\rho C_p} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\nu}{C_p} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (6)$$

Nous prendrons comme origine des  $x$  le point d'arrêt et nous nous limiterons au cas de l'écoulement sur l'extrados de l'obstacle pour lequel  $x > 0$ , étant bien entendu que l'écoulement sur l'intrados se traitera de la même façon après avoir changé l'abscisse curviligne  $x$  de signe. Les fonctions  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$  et  $\theta(x, y)$  définies dans le quadrant  $x > 0$  et  $y > 0$  obéiront aux conditions aux limites suivantes:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{y \rightarrow 0} u(x, y) = 0 \\ \lim_{y \rightarrow 0} v(x, y) = 0 \\ \lim_{y \rightarrow 0} \theta(x, y) = \theta_p(x) \end{array} \right\} \quad (7)$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{y \rightarrow \infty} u(x, y) = u_e(x) \\ \lim_{y \rightarrow \infty} \theta(x, y) = \theta_e(x) \end{array} \right\} \quad (8)$$

## 1.2. Equations de von Mises

Von Mises a imaginé d'utiliser comme variables indépendantes l'abscisse  $x$  et la fonction de courant  $\psi$  définie par les relations:

$$u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{et} \quad v = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (9)$$

et telle que  $\psi = 0$  lorsque  $y = 0$ . L'équation (1) est alors automatiquement satisfaite.

Nous aurons une correspondance biunivoque entre le quadrant  $x > 0$  et  $\psi > 0$  et le quadrant  $x > 0$  et  $y > 0$  si  $u$  est toujours positif.

Le changement de variables de von Mises permet de remplacer les dérivées particulières  $u(\partial/\partial x) + v(\partial/\partial y)$  des équations (2) et (4) par des dérivées partielles, puisque  $\psi$  est constant sur une ligne de courant.

En effet, nous avons entre les opérateurs de dérivation partielle, les relations:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_v = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_\psi - \rho v \left(\frac{\partial}{\partial \psi}\right)_x$$

et 
$$\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_x = \rho u \left(\frac{\partial}{\partial \psi}\right)_x$$

Les équations (5) et (6) deviennent en sous-entendant les indices  $x$  et  $\psi$ :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} - u_e \frac{du_e}{dx} - \mu \rho u \frac{\partial}{\partial \psi} \left( u \frac{\partial u}{\partial \psi} \right) = 0 \quad (10)$$

$$u \frac{\partial \theta}{\partial x} - u \frac{d\theta_e}{dx} - \frac{\mu \rho u}{Pr} \frac{\partial}{\partial \psi} \left( u \frac{\partial \theta}{\partial \psi} \right) = \frac{\mu \rho u^2}{C_p} \left( \frac{\partial u}{\partial \psi} \right)^2 \quad (11)$$

où  $Pr = \mu C_p / \lambda$  est le nombre de Prandtl.

### 1.3. Equations en $Z(x, \psi)$ et en $T(x, \psi)$

Prenons comme variables dépendantes:

$$Z(x, \psi) = u_e^2(x) - u^2(x, \psi)$$

et 
$$T(x, \psi) = \theta(x, \psi) - \theta_e(x)$$

L'équation (10) devient

$$\frac{\partial Z}{\partial x} - \mu \rho u \frac{\partial^2 Z}{\partial \psi^2} = 0 \quad (12)$$

avec les conditions aux limites:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} Z(x, \psi) &= 0 \\ \lim_{\psi \rightarrow 0} Z(x, \psi) &= u_e^2(x) \\ \lim_{\psi \rightarrow \infty} Z(x, \psi) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

L'équation (11) devient, si on la divise par  $u$ :

$$\frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\mu \rho}{Pr} \frac{\partial}{\partial \psi} \left( u \frac{\partial T}{\partial \psi} \right) = - \frac{\mu \rho}{2C_p} \cdot \frac{\partial u}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial Z}{\partial \psi} \quad (14)$$

avec les conditions aux limites:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} T(x, \psi) &= 0 \\ \lim_{\psi \rightarrow 0} T(x, \psi) &= \theta_p(x) - \theta_e(x) \\ \lim_{\psi \rightarrow \infty} T(x, \psi) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Une fois que les équations (12) et (14) auront été résolues avec les conditions aux limites (13) et (15),  $u$  et  $\theta$  seront des fonctions paramétriques de l'ordonnée  $y$ , le paramètre étant la fonction de courant  $\psi$ .

En effet, l'on aura:

$$y = \int_0^\psi \frac{d\psi}{\rho u} = \int_0^\psi \frac{d\psi}{\rho \sqrt{u_e^2 - Z}}$$

## 2. ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DE L'IMPULSION

### 2.1. Première approximation

Pour résoudre l'équation (12) nous utiliserons le processus d'itération suivant, où l'indice  $i$  varie de 0 à l'infini:

$$\frac{\partial Z_{i+1}}{\partial x} - \mu \rho u_0 \frac{\partial^2 Z_{i+1}}{\partial \psi^2} = \mu \rho (u_i - u_0) \frac{\partial^2 Z_i}{\partial \psi^2} \quad (17)$$

en prenant comme fonction de départ:

$$u_0 = \left( \frac{2\tau_{x1}}{\mu \rho} \right)^{1/2} \psi^{1/2} \quad (18)$$

premier terme du développement en série de  $u_1(x, \psi)$ .

$\tau_{x1}$  est la tension de frottement

$$\mu \left( \frac{\partial u_1}{\partial y} \right)_p = - \frac{\mu \rho}{2} \left( \frac{\partial Z_1}{\partial \psi} \right)_p$$

obtenue en intégrant l'équation à laquelle satisfait la première approximation  $Z_1(x, \psi)$ .

Les conditions aux limites seront:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} Z_i(x, \psi) &= 0; \quad \lim_{\psi \rightarrow 0} Z_i(x, \psi) = u_e^2(x); \\ \lim_{\psi \rightarrow \infty} Z_i(x, \psi) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

La première approximation est donc solution de l'équation:

$$\frac{\partial Z_1}{\partial x} - \mu \rho u_0 \frac{\partial^2 Z_1}{\partial \psi^2} = 0 \quad (20)$$

ou

$$\frac{\partial Z_1}{\partial x} - (2\mu\rho\tau_{p1})^{1/2}\psi^{1/2} \frac{\partial^2 Z_1}{\partial \psi^2} = 0 \quad (19)$$

avec les conditions aux limites (19).

Lighthill [2] a résolu cette équation en faisant le changement de variable:

$$t = \int_0^x (2\mu\rho\tau_{p1})^{1/2} dx \quad (22)$$

On obtient l'équation suivante:

$$\frac{\partial Z_1}{\partial t} - \psi^{1/2} \frac{\partial^2 Z_1}{\partial \psi^2} = 0 \quad (23)$$

Comme la fonction  $Z(t, \psi)$  n'est définie que lorsque  $t > 0$ , on utilisera le calcul symbolique.

Soit  $\zeta_1(p, \psi)$  l'image de la fonction  $Z_1(t, \psi)$  dans la transformation de Carson:

$$\zeta_1(p, \psi) = p \int_0^\infty e^{-pt} Z_1(t, \psi) dt$$

l'équation (23) devient, en tenant compte de la première condition du système (19):

$$p\zeta_1 - \psi^{1/2} \frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial \psi^2} = 0 \quad (24)$$

avec les conditions aux limites:

$$\lim_{\psi \rightarrow 0} \zeta_1(p, \psi) = \zeta(p); \lim_{\psi \rightarrow \infty} \zeta_1(p, \psi) = 0 \quad (25)$$

$\zeta(p)$  étant l'image de la fonction  $u_2^*(t)$ .

Faisons le changement de variables:

$$\left. \begin{aligned} z &= \frac{4}{3} p^{1/2} \psi^{3/4} \\ U_1(p, z) &= z^{-2/3} \zeta_1(p, \psi) \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

on aura:

$$\begin{aligned} \psi^{1/2} &= \left(\frac{3}{4}\right)^{2/3} p^{-1/3} z^{2/3} \\ \frac{\partial}{\partial \psi} &= \left(\frac{4}{3}\right)^{1/3} p^{2/3} z^{-1/3} \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned}$$

L'équation (24) devient après avoir divisé par  $pz^{2/3}$  et changé de signe:

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial U_1}{\partial z} - \left(1 + \frac{4}{9z^2}\right) U_1 = 0 \quad (27)$$

Les conditions aux limites (25) deviennent:

$$\lim_{z \rightarrow 0} z^{2/3} U_1(p, z) = \zeta(p); \lim_{z \rightarrow \infty} z^{2/3} U_1(p, z) = 0 \quad (28)$$

La solution de l'équation (27) avec les conditions (28) sera donc:

$$\left. \begin{aligned} U_1(p, z) &= 2^{-2/3} \frac{3^{1/2}}{\pi} \Gamma(1/3) \zeta(p) K_{2/3}(z), \\ K_\lambda(z) &= \frac{\pi}{2 \sin \lambda\pi} [I_{-\lambda}(z) - I_\lambda(z)] \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

étant la fonction de Bessel modifiée de seconde espèce. On a donc:

$$\zeta_1(p, \psi) = \frac{2^{2/3} \Gamma(1/3)}{3^{1/6} \pi} p^{1/3} \zeta(p) \psi^{1/2} K_{2/3} \left[ \frac{4}{3} p^{1/2} \psi^{3/4} \right] \quad (30)$$

## 2.2. Tension de frottement à la paroi

Le développement limité de  $Z_1(t, \psi)$  au voisinage de  $\psi = 0$  est:

$$Z_1(t, \psi) = u_2^*(t) - 2 \frac{\tau_{p1}(t)}{\rho\mu} \psi + 0(\psi^{3/2}) \quad (31)$$

En prenant les images terme à terme, on obtiendra le développement limité de  $\zeta_1(p, \psi)$  au voisinage de  $\psi = 0$ :

$$\zeta_1(p, \psi) = \zeta(p) - 2\xi_1(p)\psi + 0(\psi^{3/2}) \quad (32)$$

avec  $\xi_1(p) \subset \frac{\tau_{p1}(t)}{\rho\mu}$

Le développement limité de  $\zeta_1(p, z)$  en puissances de  $z^{2/3}$  est

$$\zeta_1(p, z) = \zeta(p) - 2^{-5/3} 3^{4/3} p^{-2/3} \xi_1(p) z^{4/3} + 0(z^2) \quad (33)$$

Le développement en série de puissances de  $z^{2/3}$  de l'expression (30) est:

$$\zeta_1(p, z) = 2^{-2/3} \Gamma(1/3) \zeta(p) z^{2/3} \left\{ \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{-2/3+2r}}{r! \Gamma(1/3+r)} - \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2/3+2r}}{r! \Gamma(5/3+r)} \right\}$$

Egalons les termes en  $z^{4/3}$  dans (33) et (34), on obtiendra:

$$\xi_1(p) = \frac{\Gamma(1/3)}{2^{2/3} 3^{1/3} \Gamma(2/3)} p^{2/3} \zeta(p) \quad (35)$$

Prenons l'original de cette relation:

$$\int_0^t (t-t')^{-1/3} \tau_{p1}(t') dt' = \frac{\mu\rho\Gamma(1/3)u_e^2(t)}{2^{2/3}3^{1/3}} \quad (36)$$

On voit enfin que  $\tau_{p1}(x)$  doit être solution de l'équation intégrale:

$$\int_0^x \left( \int_x^z [\tau_{p1}(z)]^{1/2} dz \right)^{-1/3} [\tau_{p1}(x')]^{3/2} dx' = \frac{(\mu\rho)^{2/3}\Gamma(1/3)u_e^2(x)}{2 \cdot 3^{1/3}} \quad (37)$$

Cette équation peut être résolue facilement pour certaines fonctions  $u_e(x)$ , par exemple si  $u_e(x)$  est une puissance de  $x$ .

On peut résoudre plus aisément le problème inverse, c'est à-dire déterminer l'expression de  $u_e(x)$ , connaissant  $\tau_{p1}(x)$ .

### 3. ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DE L'ÉNERGIE

#### 3.1. Première approximation

Pour résoudre l'équation (14) nous utiliserons un processus d'itération analogue à celui du paragraphe 2.1:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T_{i+1}}{\partial x} - \frac{\mu\rho}{Pr} \frac{\partial}{\partial \psi} \left( u_0 \frac{\partial T_{i+1}}{\partial \psi} \right) = \\ - \frac{\mu\rho}{Pr} \frac{\partial}{\partial \psi} \left[ (u_0 - u_i) \frac{\partial T_i}{\partial \psi} \right] - \\ - \frac{\mu\rho}{2C_p} \frac{\partial u_0}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial Z_{i+1}}{\partial \psi} + \\ + \frac{\mu\rho}{2C_p} \frac{\partial (u_0 - u_i)}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial Z_i}{\partial \psi} \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Les conditions aux limites seront:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} T_i(x, \psi) &= 0; \\ \lim_{\psi \rightarrow 0} T_i(x, \psi) &= \theta_p(x) - \theta_e(x); \\ \lim_{\psi \rightarrow \infty} T_i(x, \psi) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

La première approximation sera donc solution de l'équation:

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} - \frac{\mu\rho}{Pr} \frac{\partial}{\partial \psi} \left( u_0 \frac{\partial T_1}{\partial \psi} \right) = - \frac{\mu\rho}{2C_p} \frac{\partial u_0}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial Z_1}{\partial \psi} \quad (40)$$

ou

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} - \frac{(2\mu\rho\tau_{p1})^{1/2}}{Pr} \cdot \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \psi^{1/2} \frac{\partial T_1}{\partial \psi} \right) = - \frac{(2\mu\rho\tau_{p1})^{1/2}}{4C_p} \psi^{-1/2} \frac{\partial Z_1}{\partial \psi} \quad (41)$$

avec les conditions aux limites (39).

Lighthill [2] a résolu l'équation sans second membre, nous allons traiter maintenant le cas général pour lequel l'échauffement dû au frottement n'est plus négligeable.

Faisons le changement de variable (22), on aura:

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} - \frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \psi^{1/2} \frac{\partial T_1}{\partial \psi} \right) = - \frac{\psi^{-1/2}}{4C_p} \cdot \frac{\partial Z_1}{\partial \psi} \quad (42)$$

Soit  $T_1(p, \psi)$  l'image de la fonction  $T_1(t, \psi)$ , l'équation (42) devient en tenant compte de la première condition du système (39):

$$pT_1 - \frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \psi^{1/2} \frac{\partial T_1}{\partial \psi} \right) = - \frac{\psi^{-1/2}}{4C_p} \cdot \frac{\partial Z_1}{\partial \psi} \quad (43)$$

avec les conditions aux limites suivantes:

$$\lim_{\psi \rightarrow 0} T_1(p, \psi) = \delta(p); \quad \lim_{\psi \rightarrow \infty} T_1(p, \psi) = 0 \quad (44)$$

$\delta(p)$  étant l'image de la fonction  $\theta_p(t) - \theta_e(t)$ .

Faisons le changement de variables:

$$\left. \begin{aligned} s &= Pr^{1/2}z = \frac{4}{3} (pPr)^{1/2} \psi^{3/4} \\ V_1(p, s) &= s^{-1/3} T_1(p, \psi) \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

On aura:

$$\psi^{1/2} = \left( \frac{3}{4} \right)^{2/3} (pPr)^{-1/3} s^{2/3}$$

$$\frac{\partial}{\partial \psi} = \left( \frac{4}{3} \right)^{1/3} (pPr)^{2/3} s^{-1/3} \frac{\partial}{\partial s}$$

L'équation (44) devient après avoir divisé par  $p s^{1/3}$  et changé de signe:

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial s^2} + \frac{1}{s} \frac{\partial V_1}{\partial s} - \left( 1 + \frac{1}{9s^2} \right) V_1 = H_1(p, s) \quad (46)$$

avec

$$H_1(p, s) = \frac{Pr^{1/2}}{3C_p} s^{-4/3} \frac{\partial}{\partial z} [z^{2/3} U_1(p, z)]$$

Remplaçons  $U_1(p, z)$  par son expression (29) et utilisons les relations de récurrence des fonctions de Bessel modifiées de seconde espèce:

$$H_1(p, s) = -\frac{2^{1/3}}{3^{1/2}} \Gamma(1/3) \frac{Pr^{1/6}}{\pi s^{2/3}} \cdot \frac{\zeta(p)}{2C_p} K_{1/3}(sPr^{-1/2}) \quad (47)$$

Les conditions aux limites auxquelles devra obéir  $V_1(p, s)$  seront:

$$\lim_{s \rightarrow 0} s^{1/3} V_1(p, s) = \delta(p); \quad \lim_{s \rightarrow \infty} s^{1/3} V_1(p, s) = 0 \quad (48)$$

Nous utiliserons la méthode de variation des constantes pour intégrer l'équation (46). L'intégrale générale est donc de la forme:

$$V_1(p, s) = B_1^-(p, s) I_{-1/3}(s) + B_1^+(p, s) I_{1/3}(s) \quad (49)$$

avec

$$\left. \begin{aligned} B_1^-(p, s) &= b_1^-(p) - \frac{\pi}{3^{1/2}} \int_0^s s H_1(p, s) I_{1/3}(s) ds \\ B_1^+(p, s) &= b_1^+(p) + \frac{\pi}{3^{1/2}} \int_0^s s H_1(p, s) I_{1/3}(s) ds \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

La première condition du système (48) nous impose:

$$b_1^-(p) = 2^{-1/3} \Gamma(2/3) \delta(p) \quad (51)$$

Pour pouvoir satisfaire à la deuxième condition du système (48), il faut, d'après les développements asymptotiques de  $I_{-1/3}(s)$  et de  $I_{1/3}(s)$ , que:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} B_1^-(p, s) + \lim_{s \rightarrow \infty} B_1^+(p, s) = 0$$

donc

$$b_1^+(p) = -2^{-1/3} \Gamma(2/3) \delta(p) - \int_0^\infty s H_1(p, s) K_{1/3}(s) ds \quad (52)$$

avec:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\infty s H_1(p, s) K_{1/3}(s) ds &= \\ &= -\frac{2^{1/3} \Gamma(1/3)}{3^{1/2} \pi} Pr^{1/6} \frac{\zeta(p)}{2C_p} \times \\ &\times \int_0^\infty s^{1/3} K_{1/3}(sPr^{-1/2}) K_{1/3}(s) ds \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

Cette dernière intégrale est de la forme:

$$I(\alpha, \beta) = \int_0^\infty s^\lambda K_\mu(\alpha s) K_\nu(\beta s) ds$$

qui existe lorsque  $\mu + \nu < \lambda + 1$ ; elle s'exprime à l'aide d'une fonction hypergéométrique:

$$I(\alpha, \beta) = \frac{G(\lambda, \mu, \nu)}{\alpha^{1+\lambda-\nu}} {}_2F_1 \left( \frac{1 + \lambda - \mu - \nu}{2}, \frac{1 + \lambda + \mu - \nu}{2}; 1 + \lambda; 1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2} \right) \quad (54)$$

avec

$$\left. \begin{aligned} G(\lambda, \mu, \nu) &= 2^{\lambda-2} \times \\ &\times \left[ \Gamma[(1 + \lambda - \mu - \nu)/2] \times \right. \\ &\times \Gamma[(1 + \lambda + \nu - \mu)/2] \times \\ &\times \Gamma[(1 + \lambda + \mu + \nu)/2] \times \\ &\left. \times \Gamma[(1 + \lambda + \mu - \nu)/2] \right] \Gamma(1 + \lambda) \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

Dans notre cas  $\lambda = \frac{1}{3}, \mu = \nu = \frac{1}{3}$ .

Si nous posons  $\alpha = Pr^{-1/2}$  et  $\beta = 1$ .

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\infty s H_1(p, s) K_{1/3}(s) ds &= \\ &= -2^{-1/3} \Gamma(2/3) Pr^{2/3} \frac{\zeta(p)}{2C_p} \times \\ &\times {}_2F_1 \left( \frac{1}{3}, \frac{2}{3}; \frac{4}{3}; 1 - Pr \right) \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

Si nous posons  $\alpha = 1$  et  $\beta = Pr^{-1/2}$

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\infty s H_1(p, s) K_{1/3}(s) ds &= \\ &= -2^{-1/3} \Gamma(2/3) Pr^{1/3} \frac{\zeta(p)}{2C_p} \times \\ &\times {}_2F_1 \left( \frac{1}{3}, \frac{2}{3}; \frac{4}{3}; \frac{Pr-1}{Pr} \right) \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

Nous aurons enfin:

$$b_1^+(p) = -2^{-1/3} \Gamma(2/3) \left[ \delta(p) - r(Pr) \frac{\zeta(p)}{2C_p} \right] \quad (58)$$

où  $r(Pr)$  est une fonction du nombre de Prandtl qui est donnée par:

$$r(Pr) = Pr^{2/3} {}_2F_1 \left( \frac{1}{3}, \frac{2}{3}; \frac{4}{3}; 1 - Pr \right) \quad (59)$$

la série étant convergente lorsque  $0 < Pr < 2$  ;  
ou par :

$$r(Pr) = Pr^{1/3} {}_2F_1\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}; \frac{4}{3}; \frac{Pr-1}{Pr}\right) \quad (60)$$

la série étant convergente lorsque  $\frac{1}{2} < Pr < \infty$ .

La solution de l'équation (44) avec les conditions (45) sera donc :

$$T_1(p, \psi) = \left\{ \begin{aligned} & 2^{-1/3} \Gamma(2/3) \delta(p) + \\ & + \frac{2^{1/3}}{3} \Gamma(1/3) Pr^{1/6} \frac{\zeta(p)}{2C_p} \int_0^s \sigma^{1/3} \times \\ & \times K_{1/3}(\sigma Pr^{-1/2}) I_{1/3}(\sigma) d\sigma \left. \right\} s^{1/3} I_{-1/3}(s) - \\ & - \left\{ 2^{-1/3} \Gamma(2/3) \left[ \delta(p) - r(Pr) \times \frac{\zeta(p)}{2C_p} \right] + \right. \\ & + \frac{2^{1/3}}{3} \Gamma(1/3) Pr^{1/6} \frac{\zeta(p)}{2C_p} \int_0^s \sigma^{1/3} \times \\ & \left. \times K_{1/3}(\sigma Pr^{-1/2}) I_{-1/3}(\sigma) d\sigma \right\} s^{1/3} I_{1/3}(s) \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

avec

$$s = \frac{4}{3} (pPr)^{1/2} \psi^{3/4}$$

### 3.2. Densité de flux de chaleur à la paroi et facteur thermique pariétal de frottement

Le développement limité de  $T_1(t, \psi)$  au voisinage de  $\psi = 0$  est :

$$T_1(t, \psi) = \theta_p(t) - \theta_e(t) - \left[ \frac{Pr}{C_p} \Phi_{p1}(t) \left( \frac{2}{\mu \rho \tau_{p1}(t)} \right)^{1/2} \psi^{1/2} + 0(\psi) \right] \quad (62)$$

$\Phi_{p1} = -\lambda(\partial\theta_1/\partial y)_p$  étant la densité de flux de chaleur à la paroi dans le cas de la première approximation.

Le développement limité de  $T_1(p, \psi)$  au voisinage de  $\psi = 0$  sera donc :

$$T_1(p, \psi) = \delta(p) - \frac{2^{1/2} Pr}{C_p} \chi_1(p) \psi^{1/2} + 0(\psi) \quad (63)$$

avec

$$\chi_1(p) \subset \frac{\Phi_{p1}(t)}{[\mu \rho \tau_{p1}(t)]^{1/2}}$$

Le développement limité de  $T_1(p, s)$  en puissances de  $s^{2/3}$  sera :

$$T_1(p, s) = \delta(p) - \frac{3^{2/3}}{2^{5/6}} \frac{Pr^{2/3}}{C_p} p^{-1/3} \chi_1(p) s^{2/3} + 0(s^{4/3}) \quad (64)$$

Le coefficient de  $s^{2/3}$  dans le développement en série de puissances de  $s^{2/3}$  de l'expression (61) de  $T_1(p, s)$  est :

$$\lim_{s \rightarrow 0} s^{-2/3} [T_1(p, s) - \delta(p)] = \frac{b_1^+(p)}{2^{1/3} \Gamma(4/3)}$$

Egalons-le au coefficient correspondant du développement (64) en remplaçant  $b_1^+(p)$  par son expression (58) :

$$\chi_1(p) = C_p \frac{3^{1/3} 2^{1/6} \Gamma(2/3)}{\Gamma(1/3)} Pr^{-2/3} p^{1/3} \times \left[ \delta(p) - r(Pr) \frac{\zeta(p)}{2C_p} \right] \quad (65)$$

Lorsque la paroi est thermiquement isolée,  $\Phi_{p1} = 0$  et donc  $\chi_1(p) = 0$ . D'après (65) il faut que :

$$\delta(p) = r(Pr) \frac{\zeta(p)}{2C_p}$$

En prenant l'original de cette relation, on trouve que la température  $\theta_f$  de la paroi est :

$$\theta_f = \theta_e + r(Pr) \frac{u_e^2}{2C_p} \quad (66)$$

On voit donc que le facteur thermique pariétal de frottement  $r = [2C_p(\theta_f - \theta_e)]/u_e^2$  est égal à la fonction  $r(Pr)$  introduite dans le paragraphe 3.1, dont nous redonnerons les expressions :

$$r = Pr^{2/3} {}_2F_1\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}; \frac{4}{3}; 1 - Pr\right) \quad (67)$$

lorsque  $0 < Pr < 2$ , et

$$r = Pr^{1/3} {}_2F_1\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}; \frac{4}{3}; \frac{Pr-1}{Pr}\right) \quad (68)$$

lorsque  $\frac{1}{2} < Pr < \infty$ .

On remarquera que dans le cadre de la première approximation étudiée ici, le *facteur thermique pariétal de frottement est indépendant du gradient de pression*.

Dans le cas de la plaque plane, Pohlhausen [3] a obtenu l'expression suivante du facteur thermique pariétal de frottement :

$$r = 8 Pr \int_0^\infty [f''(\eta)] Pr \left( \int_0^\eta [f''(\eta')]^2 - Pr d\eta' \right) d\eta \quad (69)$$

la fonction  $f(\eta)$  étant solution de l'équation de Blasius :

$$f''' + ff'' = 0 \quad (70)$$

avec  $\psi = \rho f(\eta) \sqrt{(2\nu u_e x)}$  et  $\eta = y \sqrt{(u_e/2\nu x)}$ .

Nous avons porté sur le Tableau 1 les valeurs de  $r$  obtenues à l'aide des formules (67) et (68) pour différentes valeurs de  $Pr$  ainsi que les valeurs exactes données par l'expression (69).

On voit que les valeurs données par la formule (67) sont extrêmement voisines des résultats exacts.

Lorsque  $Pr = 1$ , les dérivées première, seconde et troisième de l'expression (67) sont égales respectivement à  $\frac{1}{2}$ ,  $-\frac{2}{3}$  et  $\frac{5}{6}$ . L'expression empirique  $Pr^{1/2}$  utilisée généralement a ses trois premières dérivées égales respectivement à  $\frac{1}{2}$ ,  $-\frac{1}{4}$  et  $\frac{3}{8}$ , ce qui explique qu'elle soit voisine des valeurs exactes lorsque  $Pr$  n'est pas trop différent de 1.

Lorsque  $Pr$  tend vers 0, l'expression (67) est équivalente à :

$$\frac{\Gamma^3(1/3)}{2\pi\sqrt{3}} Pr^{2/3} = 1,7666 Pr^{2/3} \quad (71)$$

Lorsque  $Pr$  tend vers l'infini, l'expression (68) est équivalente à :

$$\frac{\Gamma^3(1/3)}{2\pi\sqrt{3}} Pr^{1/3} = 1,7666 Pr^{1/3} \quad (72)$$

Sur la Fig. 1, nous avons porté  $\log r$  en fonction de  $\log Pr$ .

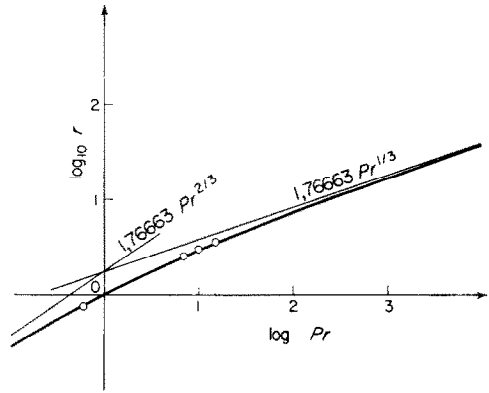


FIG. 1.  
○ Pohlhausen

Si l'on prend l'original de la relation (65) en tenant compte de (66), on aura :

$$\Phi_{p1}(t) = C_p \frac{3^{1/3} 2^{1/6}}{\Gamma(1/3)} (\mu\rho)^{1/2} Pr^{-2/3} [\tau_{p1}(t)]^{1/2} \times \left. \begin{aligned} & \times \int_0^t (t-t')^{-1/3} d[\theta_p(t') - \theta_f(t')] \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

La densité de flux de chaleur à la paroi est donnée par une intégrale de Stieltjes :

$$\Phi_{p1}(x) = C_p \frac{3^{1/3}}{\Gamma(1/3)} (\mu\rho)^{1/3} Pr^{-2/3} [\tau_{p1}(x)]^{1/2} \times \left. \begin{aligned} & \times \int_0^x \left( \int_{x'}^x [\tau_{p1}(z)]^{1/2} dz \right)^{-1/3} d[\theta_p(x') - \theta_f(x')] \end{aligned} \right\} \quad (74)$$

La densité moyenne de flux de chaleur prise de 0 à  $x$  est par définition :

$$\Phi_{m1}(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \Phi_{p1}(x) dx$$

d'où

$$x(t) \Phi_{m1}(t) = \int_0^t \frac{\Phi_{p1}(t)}{[2\mu\rho\tau_{p1}(t)]^{1/2}} dt \supset \frac{\chi_1(p)}{2^{1/2} p} \quad (75)$$

Tableau 1

$Pr$	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	7	10	15
Pohlhausen	0,770	0,835	0,895	0,950	1,000	1,050	2,515	2,965	3,535
Première approximation	0,771	0,835	0,894	0,948	1,000	1,049	2,478	2,888	3,424
$Pr^{1/2}$	0,775	0,837	0,894	0,949	1,000	1,049	2,646	3,162	3,873



On a donc :

$$\Phi_{m1}(t) = C_p \frac{3^{4/3} Pr^{-2/3}}{2^{4/3} \Gamma(1/3)} \cdot \frac{1}{x(t)} \times \int_0^t (t-t')^{2/3} d[\theta_p(t') - \theta_f(t')] \quad (76)$$

La densité moyenne de flux de chaleur est donnée aussi par une intégrale de Stieltjes :

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{m1}(x) = C_p \frac{3^{4/3} (\mu\rho)^{1/3}}{2\Gamma(1/3)} \cdot \frac{Pr^{-2/3}}{x} \times \\ \times \int_0^x \left( \int_{x'}^x [\tau_{p1}(z)]^{1/2} dz \right)^{2/3} d[\theta_p(x') - \theta_f(x')] \end{aligned} \right\} \quad (77)$$

### 3.3. Température effective locale et coefficient de convection local

Lorsque la température  $\theta_p$  est uniforme et lorsque la distribution de vitesse  $u_e(x)$  est quelconque, la formule (74) nous montre qu'il n'y a aucune raison pour que  $\Phi_{p1}$  s'annule en un point où la température de frottement  $\theta_f$  est égale à  $\theta_p$ , puisque la fonction  $\Phi_{p1}(x)$  dépend de l'histoire de la couche limite. En effet, la formule (73) devient :

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{p1}(t) = C_p \frac{3^{1/3} 2^{1/6}}{\Gamma(1/3)} (\mu\rho)^{1/2} Pr^{-2/3} [\tau_{p1}(t)]^{1/2} \times \\ \times \left\{ (\theta_p - \theta_i) t^{-1/3} + (1-r) \times \int_0^t (t-t')^{-1/3} d[u_e^2(t')] \right\} \end{aligned} \right\} \quad (78)$$

Pour pouvoir définir un coefficient de convection local, nous allons introduire une température effective locale  $\theta_{\text{eff}}(x)$  telle que  $\Phi_{p1}$  s'annule en un point d'abscisse  $x$ , lorsqu'on fait varier  $\theta_p$ . On aura donc :

$$\theta_{\text{eff}}(t) = \theta_t + \frac{r-1}{2C_p} t^{1/3} \int_0^t (t-t')^{-1/3} d[u_e^2(t')] \quad (79)$$

d'où :

$$\left. \begin{aligned} \theta_{\text{eff}}(x) = \theta_t + \frac{r-1}{2C_p} \left[ \int_0^x [\tau_{p1}(z)]^{1/2} dz \right]^{1/3} \times \\ \times \int_0^x \left( \int_{x'}^x [\tau_{p1}(z)]^{1/2} dz \right)^{1/3} d[u_e^2(x')] \end{aligned} \right\} \quad (80)$$

On définira un facteur thermique pariétal local de convection :

$$r_c = 2C_p \frac{(\theta_{\text{eff}} - \theta_e)}{u_e^2} \quad (81)$$

On remarquera que lorsque  $Pr = 1$ , on a toujours  $\theta_{\text{eff}} = \theta_t$  et  $r_c = 1$  et que, lorsque  $u_e$  est uniforme, on a  $\theta_{\text{eff}} = \theta_f$  et  $r_c = r$ . Le coefficient de convection local sera par définition :

$$\alpha = \frac{\Phi_{p1}}{\theta_p - \theta_{\text{eff}}} \quad (82)$$

### 3.4. Température effective moyenne et coefficient moyen de convection

On peut également définir une température effective moyenne  $\theta_{\text{eff}}(x)$  telle que  $\Phi_{m1}(x)$  s'annule lorsqu'on fait varier  $\theta_p$ . On aura d'après (76) :

$$\theta_{\text{eff}}(t) = \theta_t + \frac{r-1}{2C_p} t^{-2/3} \int_0^t (t-t')^{2/3} d[u_e^2(t')] \quad (83)$$

d'où

$$\left. \begin{aligned} \theta_{\text{eff}}(x) = \theta_t + \frac{r-1}{2C_p} \left[ \int_0^x [\tau_{p1}(z)]^{1/2} dz \right]^{-2/3} \times \\ \times \int_0^x \left( \int_{x'}^x [\tau_{p1}(z)]^{1/2} dz \right)^{2/3} d[u_e^2(x')] \end{aligned} \right\} \quad (84)$$

On définira de même un facteur thermique pariétal moyen de convection :

$$\bar{r}_c = 2C_p \frac{(\theta_{\text{eff}} - \theta_e)}{u_e^2} \quad (85)$$

Le coefficient de convection moyen sera donc :

$$\alpha_m = \frac{\Phi_{m1}}{\theta_p - \theta_{\text{eff}}} \quad (86)$$

### 3.5. Comparaison avec la méthode de Lighthill

Lighthill dans son mémoire déjà cité [2] a supposé que dans l'équation de l'énergie (6) le terme  $u(d\theta_e/dx)$  dû au gradient de pression et le terme  $\lambda(\partial^2\theta/\partial y^2)/\rho C_p$  dû au frottement étaient négligeables et ne s'est donc intéressé qu'à l'équation :

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} - \frac{\mu\rho}{Pr} \frac{\partial}{\partial\psi} \left( u \frac{\partial\theta}{\partial\psi} \right) = 0$$

avec les conditions aux limites :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \theta(x, \psi) = 0; \lim_{\psi \rightarrow 0} \theta(x, \psi) = \theta_p(x);$$

$$\lim_{\psi \rightarrow \infty} \theta(x, \psi) = \theta_t$$

Pour résoudre cette équation, cet auteur a remplacé  $u$  par le premier terme du développement en puissances de  $\psi^{1/2}$  de la solution exacte  $u(x, \psi)$  de l'équation (10).

Il obtient alors une expression de  $\Phi_p$  analogue à la relation (74), mais dans laquelle  $\theta_p - \theta_f$  est remplacée par  $\theta_p - \theta_t$ , et  $\tau_{p1}$  par la valeur exacte  $\tau_p$  de la tension de frottement à la paroi.

L'hypothèse de Lighthill revient à supposer que l'épaisseur  $\Delta$  (Fig. 2) de la couche limite thermique est beaucoup plus faible que l'épaisseur  $\delta$  de la couche limite dynamique; elle ne se justifie donc que pour des nombres de Prandtl élevés.

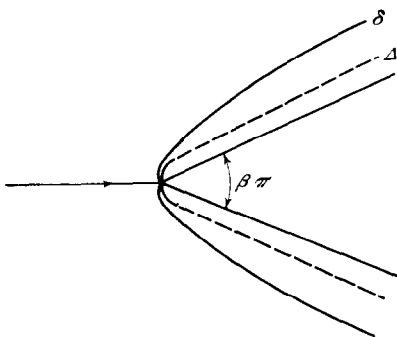


FIG. 2.

#### 4. CAS PARTICULIER DES DIÈDRES À TEMPÉRATURE UNIFORME

##### 4.1. Coefficient de frottement local

La vitesse extérieure  $u_e$  à la couche limite sur

un dièdre d'angle  $\beta\pi$  attaqué dans le plan bissecteur (Fig. 2) est de la forme

$$u_e(x) = cx^m$$

où  $c$  est une constante et  $m = \beta/(2 - \beta)$ . L'équation intégrale (37) nous donne :

$$\tau_{p1}(x) = c^{3/2} \frac{3^{1/4}(\mu\rho)^{1/2}}{2^{7/4}} (m+1)^{1/2} [Q(m)]^{3/4} x^{(3m-1)/2} \quad (87)$$

avec :

$$Q(m) = \frac{\Gamma(1/3)\Gamma\{(11m+3)/(3m+3)\}}{\Gamma(2/3)\Gamma\{(9m+1)/(3m+3)\}} \quad (88)$$

Le coefficient de frottement local  $C_f = 2\tau_{p1}/\rho u_e^2$  s'exprimera sous la forme :

$$C_f R_x^{1/2} = \frac{3^{1/4}(m+1)^{1/2}}{2^{3/4}} [Q(m)]^{3/4} \quad (89)$$

où  $R_x = u_e x/\nu$  est le nombre de Reynolds.

On a porté sur le Tableau 2 les valeurs de  $C_f R_x^{1/2}$  données par l'expression (89) pour différentes valeurs de  $m$ , ainsi que les valeurs exactes calculées par Hartree [4] :

$$C_f R_x^{1/2} = f''(0) \sqrt{2(m+1)} \quad (90)$$

$f(\eta)$  étant solution de l'équation :

$$f''' + ff'' + \beta(1 - f'^2) = 0 \quad (91)$$

avec

$$\psi = \rho f(\eta) \sqrt{\left(\frac{2\nu u_e x}{m+1}\right)} \text{ et } \eta = y \sqrt{\left(\frac{m+1}{2} \cdot \frac{u_e}{\nu x}\right)}$$

Le cas de la plaque plane correspond à  $m = 0$ , on a alors :

$$C_f R_x^{1/2} = \frac{3^{5/8} [\Gamma(1/3)]^{3/4}}{2^{3/2} \pi^{3/4}} = 0,62340 \quad (92)$$

Tableau 2

$m$	-1/9	-0,0904	-0,0654	0	1/9	1/3	1	4	$\infty$
$\beta$	-0,25	-0,1898	-0,14	0	0,20	0,50	1	1,6	2
Première approximation	0	0,201	0,341	0,623	0,946	1,396	2,272	4,436	2,200 $m^{1/2}$
Valuers exactes		0	0,328	0,664	1,023	1,514	2,465	4,811	2,386 $m^{1/2}$

La valeur exacte calculée par Howarth [5] est 0,66412; on a donc une erreur par défaut de 6,1% lorsqu'on s'arrête à la première approximation. Nous avons porté sur la Fig. 3 la variation de  $C_f R_x^{1/2}$  en fonction de  $\beta = 2m/(m+1)$ .

La différence entre les valeurs approchées données par (89) et les valeurs exactes augmente lorsque le gradient de pression croît. La valeur de  $m$  pour laquelle on aurait constamment  $\tau_{p1} = 0$  est plus faible que la valeur exacte  $-0,0904$ .

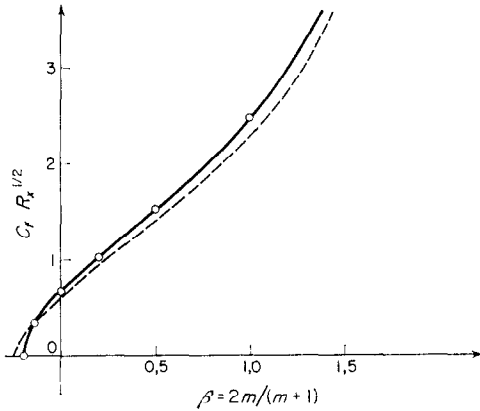


FIG. 3.  
—○— Hartree  
— — Première approximation

#### 4.2. Coefficient de convection local

La température effective locale est donnée par la formule (80) qui devient:

$$\theta_{\text{eff}}(x) = \theta_t + \frac{r-1}{2C_p} R(m) u_e^2 \quad (93)$$

où:

$$R(m) = \Gamma(2/3) \frac{\Gamma[(11m+3)/(3m+3)]}{\Gamma[(10m+2)/(3m+3)]} \quad (94)$$

La courbe représentative de la fonction  $R(m)$  a été portée sur la Fig. 4. Le facteur thermique pariétal de convection local est constant et égal à:

$$r_c = 1 + (r-1)R(m) \quad (95)$$

On a porté sur la Fig. 5 les courbes donnant la variation de  $r_c$  en fonction de  $m$  pour différentes valeurs de  $Pr$ . On voit que la première approximation donne des valeurs de  $r_c$  très voisines des

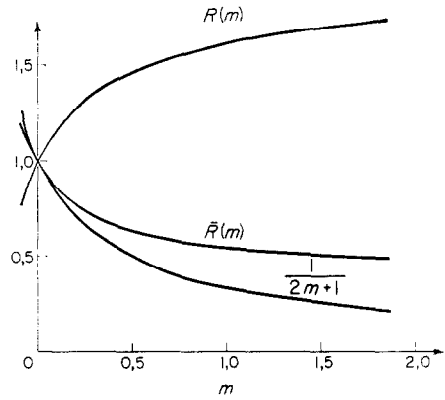


FIG. 4.

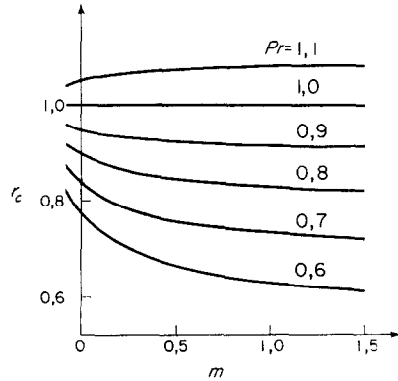


FIG. 5.

valeurs exactes données sur la Fig. 2 de l'article de Brun [6].

Le coefficient de convection local est donné par (74) et (82):

$$\alpha = C_p(\mu\rho)^{1/2} Pr^{-2/3} \times \frac{3^{3/4}(m+1)^{1/2} [Q(m)]^{1/4}}{2^{5/4}\Gamma(1/3)} c^{1/2} x^{(m-1)/2} \quad (96)$$

Le nombre de Nusselt local  $N_x = \alpha x/\lambda$  sera donné par la formule:

$$N_x \cdot R_x^{-1/2} = Pr^{1/3} \frac{3^{3/4}(m+1)^{1/2}}{2^{5/4}\Gamma(1/3)} [Q(m)]^{1/4} \quad (97)$$

Par contre la méthode de Lighthill nous donne:

$$N_x \cdot R_x^{-1/2} = Pr^{1/3} \frac{3^{2/3}(m+1)^{1/2}}{2^{5/6}\Gamma(1/3)} [f''(0)]^{1/3} \quad (98)$$

Tableau 3

<i>m</i>	-1/9	-0,0904	-0,0654	0	1/9	1/3	1	4	∞
<i>β</i>	-0,25	-0,1988	-0,14	0	0,20	0,50	1	1,6	2
Valeurs exactes		0,220	0,284	0,332	0,378	0,440	0,570	0,939	0,429 <i>m</i> <sup>1/2</sup>
Première approximation	0	0,220	0,265	0,332	0,395	0,478	0,643	1,091	0,505 <i>m</i> <sup>1/2</sup>
Lighthill		0	0,262	0,339	0,405	0,491	0,661	1,121	0,519 <i>m</i> <sup>1/2</sup>

où *N<sub>x</sub>* est égal à  $\Phi_p x / \lambda (\theta_p - \theta_t)$  puisque l'on ne tient compte ni de l'échauffement dû au gradient de pression ni de celui dû au frottement.

Avec les mêmes hypothèses, Eckert [7] a obtenu la relation:

$$N_x \cdot R_x^{-1/2} = \sqrt{\left(\frac{m+1}{2}\right) \left[ \int_0^\infty \exp\left(-Pr \int_0^\eta f(\eta') d\eta'\right) d\eta \right]^{-1}} \quad (99)$$

Nous avons porté sur le Tableau 3 les valeurs de *N<sub>x</sub>* · *R<sub>x</sub>*<sup>-1/2</sup> lorsque *Pr* = 1 obtenues à l'aide des formules (97) et (98) et les valeurs exactes données par (99).

Lorsque *m* = 0, la formule (97) devient:

$$N_x \cdot R_x^{-1/2} = Pr^{1/3} \frac{3^{7/8}}{2^{3/2} \pi^{1/4} [\Gamma(1/3)]^{3/4}} = 0,33165 Pr^{1/3},$$

tandis que la formule (98) devient:

$$N_x \cdot R_x^{-1/2} = Pr^{1/3} \frac{3^{2/3} [0,66412]^{1/3}}{2\Gamma(1/3)} = 0,33872 Pr^{1/3}$$

Lorsque *Pr* = 1, Pohlhausen [3] a montré que pour la plaque plane *N<sub>x</sub>* · *R<sub>x</sub>*<sup>-1/2</sup> était égal à *C<sub>f</sub>* *R<sub>x</sub>*<sup>1/2</sup> / 2 soit 0,33206. La formule (97) conduit à une erreur par défaut de 0,1% tandis que la formule (98) conduit à une erreur par excès de 2%.

Dans le cas général de *m* ≠ 0, la formule (97) diffère d'autant plus des résultats exacts que *m* est plus grand, mais donne toujours des valeurs plus voisines que la formule de Lighthill.

Nous avons porté sur la Fig. 6 la variation de *N<sub>x</sub>* · *R<sub>x</sub>*<sup>-1/2</sup> en fonction de *β* lorsque *Pr* = 1.

D'autre part, comme on l'a vu au paragraphe 3.2, le facteur thermique pariétal de frottement est indépendant de *m* dans le cadre de la première approximation, tandis que Eckert et Drewitz [8] ont trouvé en intégrant directement l'équation de l'énergie (6) que *r* variait avec *m* mais faiblement.

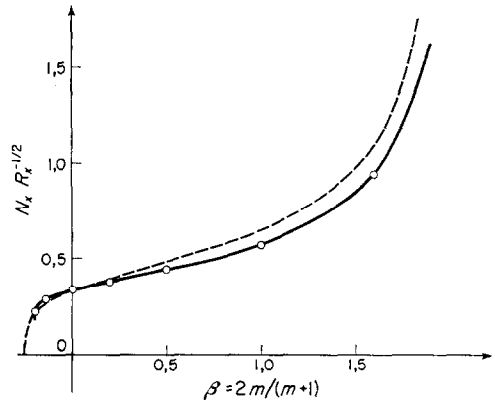


FIG. 6. *Pr* = 1.

○ Eckert

— Première approximation

### 4.3. Coefficient de convection moyen

La température effective moyenne est donnée par la formule (84) qui devient:

$$\theta_{eff}(x) = \theta_t + \frac{r-1}{2C_p} \bar{R}(m) u_e^2 \quad (100)$$

où:

$$\bar{R}(m) = \Gamma(5/3) \frac{\Gamma\{(11m+3)/(3m+3)\}}{\Gamma\{(13m+5)/(3m+3)\}} =$$

$$\frac{m+1}{5m+1} R(m) \quad (101)$$

La courbe représentative de la fonction  $\bar{R}(m)$  a été portée sur la Fig. 4.

Le facteur thermique pariétal de convection moyen est constant et égal à :

$$\bar{r}_c = 1 + (r - 1)\bar{R}(m) \quad (102)$$

On a porté sur la Fig. 7 les courbes donnant la variation de  $\bar{r}_c$  en fonction de  $m$  pour différentes valeurs de  $Pr$ .

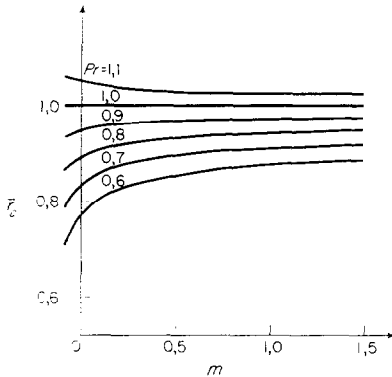


FIG. 7.  $Pr = 1,1$ .

La température moyenne de frottement est par définition :

$$\theta_{fm} = \frac{1}{x} \int_0^x \theta_f dx = \theta_i + \frac{r-1}{2C_p} \cdot \frac{u_e^2}{2m+1} \quad (103)$$

On voit sur la Fig. 4 que la fonction  $1/(2m+1)$  est voisine de la fonction  $\bar{R}(m)$ , surtout lorsque  $m$  est faible.

On vérifie donc dans le cas des dièdres que l'on ne fait pas une grande erreur en supposant que la température effective moyenne est égale à la température moyenne de frottement, comme Brun l'a fait remarquer.

Le coefficient de convection moyen rapporté à

la température effective moyenne est obtenu grâce à (77) et à (86) :

$$\alpha_m = C_p(\mu\rho)^{1/2} Pr^{-2/3} \times \frac{3^{3/4} [Q(m)]^{1/4}}{2^{1/4} \Gamma(1/3)(m+1)^{1/2}} c^{1/2} x^{(m-1)/2} \quad (104)$$

On trouve donc que le nombre de Nusselt moyen  $N_{xm} = \alpha_m x / \lambda$  sera donné par la formule :

$$N_{xm} \cdot R^{-1/2} = \frac{2}{m+1} N_x \cdot R_x^{-1/2} \quad (105)$$

$N_x \cdot R_x^{-1/2}$  étant obtenu par la formule (97).

## 5. CONCLUSION

La première approximation donne dans le cas de la plaque plane des expressions du coefficient de convection et du facteur thermique pariétal très voisines des résultats exacts.

Par contre, le cas où le gradient de pression n'est plus nul nécessiterait de poursuivre l'itération plus loin à moins que l'on ne s'intéresse qu'à un ordre de grandeur.

La méthode de calcul exposée ici permet donc d'obtenir, dans le cas général la valeur de la densité de flux de chaleur avec une erreur de l'ordre de 15% dans le cas le plus défavorable.

Je remercie M. le Professeur E. Brun pour les conseils qu'il m'a donnés au cours de cette étude que j'ai effectuée sous sa direction.

## BIBLIOGRAPHIE

1. R. VON MISES, *Z. angew. Math. Mech.* **7**, 425 (1927).
2. M. J. LIGHTHILL, *Proc. Roy. Soc. A* **202**, 359 (1950).
3. E. POHLHAUSEN, *Z. angew. Math. Mech.* **1**, 115 (1921).
4. D. R. HARTREE, *Proc. Camb. Phil. Soc.* **33**, 223 (1937).
5. L. HOWARTH, *Proc. Roy. Soc. A* **164**, 547 (1938).
6. E. A. BRUN, *Selected Combustion Problems* Vol. II, p. 185. AGARD, Pergamon Press, London (1956).
7. E. ECKERT, *Forschungsh. Ver. dtisch. Ing.* **416** (1942).
8. E. ECKERT et O. DREWITZ, *Luftfahrtforsch.* **19**, 189, (1942).